

# Циклические накрытия, которые не являются стабильно рациональными

Cyclic covers that are not stably rational

Жан-Луи Кольё-Телэн\* и Елена Пирютко†

## Аннотация

На основе методов, разработанных Колларом, Вуазан, авторами, Тотаро, мы доказываем, что циклическое накрытие  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n, n \geq 3$  простой степени  $p$ , разветвлённое над очень общей гиперповерхностью  $f(x_0, \dots, x_n) = 0$  степени  $mp$  не является стабильно рациональным при условии  $n + 1 \leq mp$ . В размерности 3 получаем двойные накрытия  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ , разветвлённые над очень общей гиперповерхностью степени 4 (Вуазан), а также двойные накрытия  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ , разветвлённые над очень общей гиперповерхностью степени 6 (Бовиль). Мы также получаем двойные накрытия  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^4$ , разветвлённые над очень общей гиперповерхностью степени 6. Метод статьи позволяет получить примеры над числовыми полями.

*Ключевые слова* : стабильная рациональность, группа Чжоу нуль-циклов, циклические накрытия.

## Résumé

Using the methods developed by Kollár, Voisin, ourselves, Totaro, we prove that a cyclic cover of  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n, n \geq 3$  of prime degree  $p$ , ramified along a very general hypersurface of degree  $mp$  is not stably rational if  $n + 1 \leq mp$ . In small dimensions, we recover double covers of  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ , ramified along a quartic (Voisin), and double covers of  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$  ramified along a sextic (Beauville), and we also find double covers of  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^4$  ramified along a sextic. This method also allows one to produce examples over a number field.

*Keywords*: stable rationality, Chow group of zero-cycles, cyclic covers.

Индекс УДК : 512.752

---

\*Jean-Louis Colliot-Thélène, C.N.R.S., Université Paris Sud, Mathématiques, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France; Chaire Lamé 2015, Université d'État de Saint Pétersbourg, Исследовательская Лаборатория имени П. Л. Чебышёва, Saint-Pétersbourg, Russie; jlct@math.u-psud.fr

†Alena Pirutka, C.N.R.S., École Polytechnique, CMLS, 91128 Palaiseau, France; alena.pirutka@polytechnique.edu

# 1 Введение

Проективное многообразие  $X$  над полем  $k$  называется стабильно рациональным, если для некоторого  $n$  многообразие  $X \times \mathbb{P}_k^n$  является рациональным. Существуют стабильно рациональные нерациональные многообразия [1]. В работе [10] Клэр Вуазан вводит метод для доказательства, что многообразие  $X$  не является стабильно рациональным, основанный на целом разложении диагонали в группе Чжоу  $CH^{dim X}(X \times X)$  и специализации. Этот метод позволяет доказать, что двойное накрытие  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ , разветвлённое над очень общей поверхностью степени 4, не является стабильно рациональным. В работе [4] мы рассматриваем свойство  $CH_0$ - универсальной тривиальности, эквивалентное целому разложению диагонали для гладких проективных многообразий, и которое делает метод специализации более гибким, в частности, для случая специализации над кольцом дискретного нормирования с полем вычетов положительной характеристики. Мы доказываем, что при очень общем выборе коэффициентов, гладкая комплексная кватерника размерности 3 не является стабильно рациональным многообразием.

**Определение 1.1.** Пусть  $f : X \rightarrow Y$  проективный морфизм многообразий над полем  $k$ . Морфизм  $f$  называется  $CH_0$ - универсально тривиальным, если для любого расширения полей  $L/k$  отображение  $f_* : CH_0(X_L) \rightarrow CH_0(Y_L)$  является изоморфизмом. Если  $Y = \text{Spec } k$  и  $f$  — структурный морфизм, то многообразие  $X$  называется  $CH_0$ - универсально тривиальным.

В частности, стабильно рациональное многообразие является  $CH_0$ - универсально тривиальным.

В работах А. Бовиля [2, 3] рассматриваются случаи двойных накрытий  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ , разветвлённых над очень общей поверхностью степени 6, а также двойных накрытий  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^4$  и  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^5$ , разветвлённых над очень общей гиперповерхностью степени 4. В работе [5], Э. Креш, Б. Хассетт и Ю. Чинкель рассматривают случай некоторых расслоений на коники.

Б. Тотаро [9] доказал, что очень общая поверхность степени  $d$  в  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}$  не является стабильно рациональной при условиях  $d \geq 2\lceil(n+2)/3\rceil$  и  $n \geq 3$ ; в доказательстве используются результаты Коллара [7, 8] о двойных накрытиях в характеристике 2 и результат о специализации  $CH_0$ - универсальной тривиальности [4] 1.14 над кольцом дискретного нормирования с полем частных характеристики ноль и с полем вычетов положительной характеристики. Как замечает Тотаро [9], методы, описанные

выше, также возможно применить для более общих накрытий : в этой работе мы продолжаем изучение циклических накрытий в положительной характеристике и доказываем следующий результат (теорема 4.1):

**Теорема 1.2.** *Пусть  $p$  – простое число. Пусть  $X$  – циклическое накрытие  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ ,  $n \geq 3$  степени  $p$ , разветвлённое над очень общей гиперповерхностью  $f(x_0, \dots, x_n) = 0$  степени  $mp$ . Предположим, что  $m(p-1) < n+1 \leq mp$ . Тогда  $X$  – многообразие Фано, которое не является стабильно рациональным многообразием.*

Как и в работе [9], мы получаем примеры над числовыми полями.

Заметим, что при  $n = 3, m = p = 2$  получаем очень общие двойные накрытия  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ , разветвлённые над кватрикой (более общие результаты получены в работе [10]), при  $n = 3, m = 3, p = 2$  мы получаем другое доказательство результатов [3].

При условии  $mp > n+1$ , Коллар доказал, что рассматриваемые накрытия не являются линейчатыми [6]. Однако, это не даёт результатов о стабильной рациональности, так как существуют стабильно рациональные многообразия размерности 3, которые не являются рациональными [1].

## 2 $CH_0$ -универсальная тривиальность сингулярных многообразий

**Лемма 2.1.** *Пусть  $k$  – алгебраически замкнутое поле и пусть  $X$  – целое проективное многообразие над  $k$ . Пусть  $U \subset X$  открытое подмногообразие. Тогда для любой точки  $z \in X(k)$  существует цикл  $\xi \in Z_0(U)$  рационально эквивалентный  $z$  в  $CH_0(X)$ .*

*Доказательство.* Если  $X = C$  – целая кривая с нормализацией  $D$ , то утверждение следует из того, что группа Пикара полулокальных колец  $D$  тривиальна. В общем случае достаточно заметить, что существует целая кривая  $C$ , такая, что  $z \in C$  и  $C \cap U \neq \emptyset$ .  $\square$

**Лемма 2.2.** *Пусть  $k$  – алгебраически замкнутое поле и пусть  $X$  – целое проективное  $k$ -рациональное многообразие. Если  $X$  является гладким за исключением конечного числа точек, то  $X$  – универсально  $CH_0$ -тривиальное многообразие.*

*Доказательство.* Пусть  $\emptyset \neq U \subset X$  открытое подмногообразие, изоморфное открытому подмногообразию  $\mathbb{P}_k^n$ . Пусть  $F/k$  – некоторое расширение полей. Любая гладкая точка  $z \in X_F(F)$  рационально эквивалентна в  $X_F$  нуль-циклу из  $Z_0(U_F)$ . Из предыдущей леммы получаем, что это остаётся верным для любой  $F$ -точки  $X$ . Аналогично рассуждениям [4] 1.5 получаем, что каждый цикл в  $Z_0(X_F)$  рационально эквивалентен циклу  $Nx$ , для некоторого  $N$  и (фиксированного)  $x \in U(k) \subset U(F) \subset X(F)$ .  $\square$

**Лемма 2.3.** *Пусть  $k$  – алгебраически замкнутое поле и пусть  $X$  – связное проективное многообразие над  $k$ . Если каждая приведённая компонента  $X$  является  $k$ -рациональным многообразием с изолированными сингулярными точками, то  $X$  – универсально  $CH_0$ -тривиальное многообразие.*

*Доказательство.* Достаточно применить предыдущую лемму и [4] 1.3.  $\square$

В следующем параграфе мы применим лемму 2.3 для исключительных дивизоров разрешения особенностей. Приведём также более общее утверждение для объединения  $CH_0$ -универсально тривиальных многообразий. Далее в этой статье нам понадобится только лемма 2.3.

**Лемма 2.4.** *Пусть  $X$  – проективное приведённое геометрически связное многообразие над полем  $k$  и пусть  $X = \bigcup_{i=1}^N X_i$  разложение  $X$  на неприводимые компоненты. Предположим, что*

- (i) *каждое из многообразий  $X_i$  геометрически неприводимо и является  $CH_0$ -универсально тривиальным;*
- (ii) *каждое из пересечений  $X_i \cap X_j$  либо пусто, либо содержит 0-цикл  $z_{ij}$  степени 1.*

*Тогда многообразие  $X$  является  $CH_0$ -универсально тривиальным многообразием.*

*Доказательство.* Пусть  $L/k$  расширение полей и пусть  $z \in CH_0(X_L)$  класс цикла степени 0. Так как  $X$  – геометрически связное, то в дуальном графе геометрических компонент существует полный цикл : существует последовательность индексов  $i_1, \dots, i_m$ ,  $1 \leq i_j \leq N$  (где  $m$  может быть больше, чем  $N$ ), такая, что  $\{i_1, \dots, i_m\} = \{1, \dots, N\}$  и  $X_{i_j, L} \cap X_{i_{j+1}, L}$  непусто для всех  $1 \leq j \leq m$ .

Можно разложить  $z = \sum z_{i_j}$ , где  $z_{i_j} \in CH_0(X_{i_j, L})$  степени  $d_j$ ,  $\sum d_j = 0$  (с произвольным выбором на пересечениях, также некоторые  $z_{i_j}$  могут

быть равны нулю). Тогда  $z_{i_1} = d_1 z_{i_1 i_2 L}$  в  $CH_0(X_{i_1 L})$ , откуда  $z_{i_1} + z_{i_2} = (d_1 + d_2) z_{i_2 i_3 L}$  в  $CH_0(X_{i_1 L} \cup X_{i_2 L})$  и т.д., получаем  $z = \sum z_{i_j} = (\sum d_i) z_{i_{m-1}, i_m L} = 0$  в  $CH_0(X_L)$ .  $\square$

*Замечание.* Условие (i) выполняется, если существует разрешение особенностей  $\pi_i : \tilde{X}_i \rightarrow X_i$ , такое, что  $\tilde{X}_i$  является  $CH_0$ -универсально тривиальным многообразием и все (схематические) слои  $\pi_i$  являются  $CH_0$ -универсально тривиальными многообразиями (см. [4], Prop. 1.8.)

### 3 Циклические накрытия и особенности

Напомним вкратце некоторые свойства циклических накрытий [7].V, [8]. Пусть  $p$  – простое число и  $f(x_0, \dots, x_n)$  – однородный многочлен степени  $mp$  над полем  $k$ . Циклическое накрытие  $\mathbb{P}_k^n$ , разветвлённое над  $f(x_0, \dots, x_n) = 0$ , определяется как подмногообразие  $\mathbb{P}(m, 1, 1, \dots, 1)$  заданное условием

$$y^p - f(x_0, \dots, x_n) = 0.$$

Если  $k$  – поле характеристики  $p$ , то такое циклическое накрытие почти всегда сингулярно, особенности соответствуют критическим точкам  $f$ .

**Определение 3.1.** Критической точкой многочлена  $g(x_1, \dots, x_n)$  над полем  $k$  называется точка  $P$ , такая, что  $\partial g / \partial x_i(P) = 0 \forall i$ . Критическая точка  $P$  многочлена  $g$  называется невырожденной, если определитель  $|\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(P)|$  не равен нулю. Критической точкой однородного многочлена  $f(x_0, \dots, x_n)$  называется критическая точка одного из многочленов  $f(x_0, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$ .

Если  $k$  – поле характеристики 2 и  $n$  нечётно, то все критические точки многочлена  $g \in k[x_1, \dots, x_n]$  являются вырожденными.

**Определение 3.2.** Пусть  $k$  – поле характеристики 2 и  $n$  нечётно. Критическая точка  $P$  многочлена  $g(x_1, \dots, x_n)$  называется почти невырожденной, если

$$\text{length} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n, P} / (\partial g / \partial x_1(P), \dots, \partial g / \partial x_n(P)) = 2.$$

Для изучения стабильной рациональности нам понадобятся результаты о разрешении особенностей циклических накрытий (см. также [6]).

**Лемма 3.3.** Пусть  $k$  – алгебраически замкнутое поле характеристики 2 и пусть

$$X : y^2 = f(x_1, \dots, x_n)$$

аффинное двойное накрытие, сингулярное в точке  $P = (y, x_1, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$ , где  $n \geq 2$  чётно и  $(0, \dots, 0)$  – невырожденная критическая точка многочлена  $f$ . Пусть  $\tilde{X} \rightarrow X$  – раздутие точки  $P$ . Тогда :

(i) в окрестности точки  $P$  накрытие  $X$  задаётся условием

$$y^2 = x_1x_2 + x_3x_4 + \dots + x_{n-1}x_n + g(x_1, \dots, x_n),$$

где каждый одночлен в записи  $g(x_1, \dots, x_n)$  имеет степень не менее трёх.

(ii) многообразие  $\tilde{X}$  является гладким в окрестности исключительного дивизора  $E$  и многообразие  $E$  является универсально  $CH_0$ -тривиальным.

*Доказательство.* Свойство (i) рассматривается в упражнении V.5.6.6 книги [7] (см. также доказательство теоремы 3.7 далее).

Докажем (ii). Достаточно рассмотреть следующие карты раздутия:

1.  $x_i = yz_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  и  $\tilde{X}$  задаётся условием

$$1 = z_1z_2 + z_3z_4 + \dots + z_{n-1}z_n + \frac{1}{y^2}g(yz_1, \dots, yz_n)$$

в аффинных координатах  $y, z_1, \dots, z_n$ .

Заметим, что многочлен  $\frac{1}{y^2}g(yz_1, \dots, yz_n)$  делится на  $y$ . Исключительный дивизор  $E$  раздутия  $\tilde{X} \rightarrow X$  задаётся условием  $y = 0$ . Получаем уравнение  $E$  в этой карте :

$$z_1z_2 + z_3z_4 + \dots + z_{n-1}z_n = 1,$$

задающее гладкую квадрику. Многообразие  $\tilde{X}$  является гладким в каждой точке  $E$  (это следует из уравнения  $\tilde{X}$ ).

2.  $y = wx_1$ ,  $x_i = x_1z_i$ ,  $i \neq 1$ . Исключительный дивизор  $E$  задаётся условием  $x_1 = 0$ . Получаем следующие уравнения в этой карте для  $\tilde{X}$  и  $E$  соответственно :

$$w^2 = z_2 + z_3z_4 + \dots + z_{n-1}z_n + \frac{1}{x_1^2}g(x_1, x_1z_2, \dots, x_1z_n)$$

и

$$z_2 = -(z_3 z_4 + \dots + z_{n-1} z_n) + w^2,$$

Таким образом, многообразие  $E$  является гладким и рациональным (так как  $E$  изоморфно аффинному пространству с координатами  $z_3, \dots, z_n, w$ ). Многообразие  $\tilde{X}$  является гладким в каждой точке  $E$ .

Таким образом, исключительный дивизор  $E$  является гладким рациональным многообразием, следовательно, универсально  $CH_0$ -тривиальным (см. [4] 1.5). □

**Лемма 3.4.** Пусть  $k$  – алгебраически замкнутое поле характеристики 2 и пусть

$$X : y^2 = f(x_1, \dots, x_n)$$

аффинное двойное накрытие, сингулярное в точке  $P = (y, x_1, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$ , где  $n \geq 3$  нечётно и  $(0, \dots, 0)$  – почти невырожденная критическая точка многочлена  $f$ . Пусть  $\tilde{X} \rightarrow X$  – раздутие точки  $P$ . Тогда :

(i) в окрестности точки  $P$  накрытие  $X$  задаётся условием

$$y^2 = ax_1^2 + x_2 x_3 + x_4 x_5 + \dots + x_{n-1} x_n + g(x_1, \dots, x_n),$$

где каждый одночлен в записи  $g(x_1, \dots, x_n)$  имеет степень не менее трёх, и коэффициент  $b$  многочлена  $g$  при  $x_1^3$  не равен нулю.

(ii) многообразие  $\tilde{X}$  является гладким в окрестности исключительного дивизора  $E$  и многообразие  $E$  является универсально  $CH_0$ -тривиальным.

*Доказательство.* Свойство (i) рассматривается в упражнении V.5.7 книги [7] (см. также доказательство теоремы 3.7 далее). Докажем (ii). Достаточно рассмотреть следующие карты раздутия:

1.  $x_i = yz_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  и  $\tilde{X}$  задаётся условием

$$1 = az_1^2 + z_2 z_3 + z_4 z_5 + \dots + z_{n-1} z_n + \frac{1}{y^2} g(yz_1, \dots, yz_n)$$

в аффинных координатах  $y, z_1, \dots, z_n$ .

Заметим, что многочлен  $\frac{1}{y^2} g(yz_1, \dots, yz_n)$  делится на  $y$ . Исключительный дивизор  $E$  раздутия  $\tilde{X} \rightarrow X$  задаётся условием  $y = 0$ . Получаем уравнение  $E$  в этой карте :

$$az_1^2 + z_2 z_3 + z_4 z_5 + \dots + z_{n-1} z_n = 1.$$

При  $a = 0$  получаем произведение  $\mathbb{A}^1$  и гладкой квадрики. При  $a \neq 0$  получаем неприводимую квадрику, сингулярную в одной точке  $z_i = 0, i > 1$  и  $az_1^2 = 1$ .

Многообразие  $\tilde{X}$  является гладким в каждой точке  $E$ : сингулярная точка  $\tilde{X}$  должна удовлетворять условиям:  $z_2 = \dots = z_n = 0, y = 0, bz_1^3 = 0$  и  $az_1^2 = 1$ , что невозможно.

2.  $y = wx_2, x_i = x_2z_i, i \neq 2$ . Исключительный дивизор  $E$  задаётся условием  $x_2 = 0$ . Получаем следующие уравнения в этой карте для  $\tilde{X}$  и  $E$  соответственно:

$$w^2 = az_1^2 + z_3 + z_4z_5 + \dots + z_{n-1}z_n + \frac{1}{x_2^2}g(x_2z_1, x_2, x_2z_3, \dots, x_2z_n)$$

и

$$z_3 = -(az_1^2 + z_4z_5 + \dots + z_{n-1}z_n) + w^2.$$

Как и в предыдущих вычислениях, многочлен  $\frac{1}{x_2^2}g(x_2z_1, x_2, x_2z_3, \dots, x_2z_n)$  делится на  $x_2$ . Таким образом, многообразие  $\tilde{E}$  является гладким и рациональным (так как изоморфно аффинному пространству). Многообразие  $\tilde{X}$  является гладким в каждой точке  $E$ .

3.  $y = wx_1, x_i = x_1z_i, i \neq 1$ . Исключительный дивизор  $E$  задаётся условием  $x_1 = 0$ . Получаем следующие уравнения в этой карте для  $\tilde{X}$  и  $E$  соответственно:

$$w^2 = a + z_2z_3 + z_4z_5 + \dots + z_{n-1}z_n + \frac{1}{x_1^2}g(x_1, x_1z_2, \dots, x_1z_n)$$

и

$$a + z_2z_3 + z_4z_5 + \dots + z_{n-1}z_n - w^2 = 0.$$

Многообразие  $E$  является неприводимой квадрикой, сингулярной в одной точке  $z_i = 0; \forall i$  и  $a - w^2 = 0$ . Так как коэффициент  $g$  при  $x_1^3$  не равен нулю, многообразие  $\tilde{X}$  является гладким в каждой точке  $E$  (аналогично вычислениям в пункте 1).

Получаем, что многообразие  $E$  является неприводимым, имеет только изолированную сингулярную точку  $(c : 1 : 0 : \dots : 0)$ , где  $c^2 = a$ , и открытое подмногообразие  $E$  является гладким и рациональным. По лемме 2.3,  $E$  универсально  $CH_0$ -тривиально.

□

**Лемма 3.5.** Пусть  $k$  – алгебраически замкнутое поле характеристики  $p > 2$  и пусть

$$X : y^p = f(x_1, \dots, x_n)$$



аффинное циклическое накрытие, сингулярное в точке  $P = (y, x_1, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$ , где  $(0, \dots, 0)$  – невырожденная критическая точка многочлена  $f$ . Предположим, что  $n$  чётно. Тогда :

(i) в окрестности точки  $P$  накрытие  $X$  задаётся условием  $y^p = x_1x_2 + x_3x_4 + \dots + x_{n-1}x_n + g(x_1, \dots, x_n)$ , где каждый одночлен в записи  $g(x_1, \dots, x_n)$  имеет степень не менее трёх.

(ii) Многообразие  $\tilde{X}$ , полученное в результате раздутия точки  $P$  и конечного числа раздутий изолированных сингулярных точек с образом  $P$  в  $X$ , является гладким в окрестности  $\tilde{X}_P$  и слой  $\tilde{X}_P$  является универсально  $CH_0$ -тривиальным (но, в общем случае,  $\tilde{X}_P$  не является неприводимым).

*Доказательство.* Свойство (i) рассматривается в упражнении V.5.6.6 книги [7] (см. также доказательство теоремы 3.7 далее). Докажем (ii). Пусть  $X' \rightarrow X$  – раздутие  $X$  в точке  $P$ . Достаточно рассмотреть следующие карты :

1.  $y = wx_1$ ,  $x_i = x_1z_i$ ,  $i \neq 1$ . Исключительный дивизор  $E$  задаётся условием  $x_1 = 0$ . Получаем следующие уравнения в этой карте для  $X'$  и  $E$  соответственно :

$$x_1^{p-2}w^p = z_2 + z_3z_4 + \dots + z_{n-1}z_n + \frac{1}{x_1^2}g(x_1, x_1z_2, \dots, x_1z_n)$$

(где многочлен  $\frac{1}{x_1^2}g(x_1, x_1z_2, \dots, x_1z_n)$  делится на  $x_1$ ) и

$$z_2 = -(z_3z_4 + \dots + z_{n-1}z_n),$$

Таким образом, многообразие  $E$  является гладким и рациональным. Многообразие  $X'$  является гладким в каждой точке  $E$ .

2.  $x_i = yz_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  и  $X'$  задаётся условием

$$y^{p-2} = z_1z_2 + z_3z_4 + \dots + z_{n-1}z_n + \frac{1}{y^2}g(yz_1, \dots, yz_n).$$

Исключительный дивизор  $E$  раздутия  $X' \rightarrow X$  задаётся условием  $y = 0$ . Получаем уравнение  $E$  в этой карте :

$$z_1z_2 + z_3z_4 + \dots + z_{n-1}z_n = 0,$$

задающее квадрику, сингулярную в точке  $(z_1, \dots, z_n) = (0, \dots, 0)$ .

Многообразие  $X'$  является сингулярным в единственной точке  $P' = (y, z_1, \dots, z_n) = (0, \dots, 0)$  если  $p > 3$  и гладким, если  $p = 3$ . Если  $p > 3$ , пусть  $X'' \rightarrow X'$  раздутие  $X'$  в точке  $P'$ . Аналогично, рассматриваем следующие карты :

- (а)  $y = z_1 w$ ,  $z_i = t_i z_1$ ,  $i \neq 1$ , исключительный дивизор  $E'$  задаётся условием  $z_1 = 0$ . Получаем следующие уравнения в этой карте для  $X''$  и  $E'$  соответственно :

$$w^{p-2} z_1^{p-4} = t_2 + t_3 t_4 + \dots + t_{n-1} t_n + \frac{1}{z_1^2} h(z_1 w, z_1, z_1 t_2, \dots, z_1 t_n),$$

$$t_2 + t_3 t_4 + \dots + t_{n-1} t_n = 0,$$

где мы обозначили  $\frac{1}{y^2} g(y z_1, \dots, y z_n) = h(y, z_1, \dots, z_n)$ . Заметим, что многочлен  $h(z_1 w, z_1, z_1 t_2, \dots, z_1 t_n)$  делится на  $z_1^3$ . Получаем, что  $E'$  является гладким и рациональным: произведение  $\mathbb{A}^1$  (соответствующего координате  $w$ ), и многообразия  $t_2 = -(t_3 t_4 + \dots + t_{n-1} t_n)$ , и что  $X''$  является гладким в каждой точке  $E'$  в этой карте.

- (б)  $z_i = y t_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $E'$  задаётся условием  $y = 0$  и  $X''$  задаётся условием

$$y^{p-4} = t_1 t_2 + t_3 t_4 + \dots + t_{n-1} t_n + \frac{1}{y^4} g(y^2 t_1, \dots, y^2 t_n)$$

в этой карте. Многочлен  $\frac{1}{y^4} g(y^2 t_1, \dots, y^2 t_n)$  делится на  $y$ . Исключительный дивизор  $E'$  является квадрикой

$$t_1 t_2 + t_3 t_4 + \dots + t_{n-1} t_n = 0.$$

Аналогично, многообразие  $X''$  является сингулярным в единственной точке  $(y, t_1, \dots, t_n) = (0, \dots, 0)$  если  $p > 5$  и гладким, если  $p = 5$ . Если  $X''$  сингулярно, то мы повторяем предыдущую конструкцию. После конечного числа таких операций мы получим многообразие  $\tilde{X} \rightarrow X$ , гладкое в каждой точке над  $R$  и такое, что все исключительные дивизоры являются рациональными многообразиями, гладкими или с единственной изолированной сингулярной точкой, как описано выше.

Из описания исключительных дивизоров и леммы 2.3 получаем, что слой  $\tilde{X}_R$  является связным  $CH_0$ -универсально тривиальным многообразием.

□

**Лемма 3.6.** Пусть  $k$  – алгебраически замкнутое поле характеристики  $p > 2$  и пусть

$$X : y^p = f(x_1, \dots, x_n)$$

аффинное циклическое накрытие, сингулярное в точке  $P = (y, x_1, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$ , где  $(0, \dots, 0)$  – невырожденная критическая точка многочлена  $f$ . Предположим, что  $n$  нечётно. Тогда :

- (i) в окрестности точки  $P$  накрытие  $X$  задается условием  $y^p = x_1^2 + x_2x_3 + x_4x_5 + \dots + x_{n-1}x_n + g(x_1, \dots, x_n)$ , где каждый одночлен в записи  $g(x_1, \dots, x_n)$  имеет степень не менее трёх.
- (ii) Многообразие  $\tilde{X}$ , полученное в результате раздутия точки  $P$  и конечного числа раздутий изолированных сингулярных точек с образом  $P$  является гладким в окрестности  $\tilde{X}_P$  и слой  $\tilde{X}_P$  является универсально  $CH_0$ -тривиальным (но, в общем случае,  $\tilde{X}_P$  не является неприводимым).

*Доказательство.* Свойство (i) рассматривается в упражнении V.5.6.6 книги [7] (см. также доказательство теоремы 3.7 далее).

Докажем (ii). Пусть  $X' \rightarrow X$  – раздутие  $X$  в точке  $P$ . Достаточно рассмотреть следующие карты :

1.  $y = wx_1$ ,  $x_i = x_1z_i$ ,  $i \neq 1$ . Исключительный дивизор  $E$  задаётся условием  $x_1 = 0$ . Получаем следующие уравнения в этой карте для  $X'$  и  $E$  соответственно :

$$x_1^{p-2}w^p = 1 + z_2z_3 + z_4z_5 + \dots + z_{n-1}z_n + \frac{1}{x_1^2}g(x_1, x_1z_2, \dots, x_1z_n)$$

(где многочлен  $\frac{1}{x_1^2}g(x_1, x_1z_2, \dots, x_1z_n)$  делится на  $x_1$ ) и

$$1 + z_2z_3 + z_4z_5 + \dots + z_{n-1}z_n = 0.$$

Таким образом, многообразие  $E$  является гладким и рациональным : произведение  $\mathbb{A}^1$  (соответствующего координате  $w$ ) и гладкой квадрики  $1 + z_2z_3 + z_4z_5 + \dots + z_{n-1}z_n = 0$ . Многообразие  $X'$  является гладким в каждой точке  $E$  в этой карте.

2.  $y = wx_2$ ,  $x_i = x_2z_i$ ,  $i \neq 2$ . Исключительный дивизор  $E$  задаётся условием  $x_2 = 0$ . Получаем следующие уравнения в этой карте для  $X'$  и  $E$  соответственно :

$$x_2^{p-2}w^p = z_1^2 + z_3 + z_4z_5 + \dots + z_{n-1}z_n + \frac{1}{x_2^2}g(z_1x_2, x_2, x_2z_3, \dots, x_2z_n)$$

(где многочлен  $\frac{1}{x_2^2}g(z_1x_2, x_2, x_2z_3, \dots, x_2z_n)$  делится на  $x_2$ ) и

$$z_3 = -(z_1^2 + z_4z_5 + \dots + z_{n-1}z_n),$$

Таким образом, многообразие  $E$  является гладким и рациональным (так как изоморфно аффинному пространству). Многообразие  $X'$  является гладким в каждой точке  $E$  в этой карте.

3.  $x_i = yz_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  и  $X'$  задаётся условием

$$y^{p-2} = z_1^2 + z_2z_3 + z_4z_5 + \dots + z_{n-1}z_n + \frac{1}{y^2}g(yz_1, \dots, yz_n).$$

Заметим, что многочлен  $\frac{1}{y^2}g(yz_1, \dots, yz_n)$  делится на  $y$ .

Исключительный дивизор  $E$  раздутия  $X' \rightarrow X$  задаётся условием  $y = 0$ . Получаем уравнения  $E$  в этой карте :

$$z_1^2 + z_2z_3 + z_4z_5 + \dots + z_{n-1}z_n = 0,$$

задающее квадрику, сингулярную в точке  $(z_1, \dots, z_n) = (0, \dots, 0)$ .

Многообразие  $X'$  также является сингулярным в единственной точке  $P' = (y, z_1, \dots, z_n) = (0, \dots, 0)$  если  $p > 3$  и гладким в окрестности исключительного дивизора, если  $p = 3$ . Если  $p > 3$ , пусть  $X'' \rightarrow X'$  раздутие  $X'$  в точке  $P'$ . Аналогично предыдущей лемме, рассматриваем следующие карты :

(a)  $y = z_1w$ ,  $z_i = t_iz_1$ ,  $i \neq 1$ , исключительный дивизор  $E'$  задаётся условием  $z_1 = 0$ . Получаем следующие уравнения для  $X''$  и  $E'$  соответственно :

$$w^{p-2}z_1^{p-4} = 1 + t_2t_3 + t_4t_5 + \dots + t_{n-1}t_n + \frac{1}{z_1^2}h(z_1w, z_1, z_1t_2, \dots, z_1t_n),$$

$$1 + t_2t_3 + t_4t_5 + \dots + t_{n-1}t_n = 0,$$

где многочлен  $\frac{1}{y^2}g(yz_1, \dots, yz_n) = h(y, z_1, \dots, z_n)$  делится на  $z_1^3$ . Получаем, что  $E'$  является гладким и рациональным: произведение  $\mathbb{A}^1$  (соответствующего координате  $w$ ) и многообразия, заданного уравнением  $1 + t_2t_3 + t_4t_5 + \dots + t_{n-1}t_n = 0$ . Многообразие  $X'$  является гладким в каждой точке  $E'$  в этой карте.

(b)  $y = z_2w$ ,  $z_i = t_iz_2$ ,  $i \neq 2$ , исключительный дивизор  $E'$  задаётся условием  $z_2 = 0$ . Получаем следующие уравнения для  $X''$  и  $E'$  соответственно :

$$w^{p-2}z_2^{p-4} = t_1^2 + t_3 + t_4t_5 + \dots + t_{n-1}t_n + \frac{1}{z_2^2}h(z_2w, z_2t_1, z_2, z_2t_3, \dots, z_2t_n),$$

$$t_1^2 + t_3 + t_4t_5 + \dots + t_{n-1}t_n = 0,$$

где мы обозначили  $\frac{1}{y^2}g(yz_1, \dots, yz_n) = h(y, z_1, \dots, z_n)$ . Получаем, что  $E'$  является гладким и рациональным и что  $X''$  является гладким в каждой точке  $E'$  в этой карте.

- (с)  $z_i = yt_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $E'$  задаётся условием  $y = 0$  и  $X''$  задаётся условием

$$y^{p-4} = t_1^2 + t_2t_3 + t_4t_5 + \dots + t_{n-1}t_n + \frac{1}{y^4}g(y^2t_1, \dots, y^2t_n).$$

Многочлен  $\frac{1}{y^4}g(y^2t_1, \dots, y^2t_n)$  делится на  $y$ . Исключительный дивизор  $E'$  является квадрикой

$$t_1^2 + t_2t_3 + t_4t_5 + \dots + t_{n-1}t_n = 0.$$

Аналогично, многообразие  $X''$  является сингулярным в окрестности  $E$  в этой карте в единственной точке  $(y, t_1, \dots, t_n) = (0, \dots, 0)$  если  $p > 5$  и гладким, если  $p = 5$ . Если  $X''$  сингулярно, то мы повторяем предыдущую конструкцию. После конечного числа таких операций мы получим многообразие  $\tilde{X} \rightarrow X$ , гладкое в каждой точке над  $P$  и такое, что все исключительные дивизоры являются рациональными многообразиями, гладкими или с единственной изолированной сингулярной точкой, как описано выше.

Из описания исключительных дивизоров и леммы 2.3 получаем, что слой  $\tilde{X}_P$  является связным  $CH_0$ -универсально тривиальным многообразием.

□

Следующее утверждение даёт ключевые нетривиальные инварианты циклических накрытий.

Напомним, что коэффициенты многочленов  $f \in k[x_0, \dots, x_n]$  заданной степени параметризуются точками некоторого аффинного пространства. Общий выбор коэффициентов  $f$  означает, что мы рассматриваем коэффициенты из некоторого непустого открытого (в топологии Зарисского) подмногообразия этого аффинного пространства.

**Теорема 3.7.** Пусть  $k$  – алгебраически замкнутое поле характеристики  $p$  и пусть  $f(x_0, \dots, x_n)$  – однородный многочлен степени  $tr \geq n + 1$ ,  $n \geq 3$ . Для общего выбора коэффициентов  $f$  выполняются следующие условия:

- (i) все критические точки  $f$  являются невырожденными, если  $p > 2$  или  $p = 2$  и  $n$  чётно;
- (ii) все критические точки  $f$  являются почти невырожденными, если  $p = 2$  и  $n$  нечётно.
- (iii) Если  $\tilde{X} \rightarrow X$  – разрешение особенностей  $X$ , полученное последовательным раздутием сингулярных точек, то морфизм  $\tilde{X} \rightarrow X$  является  $CH_0$ -универсально тривиальным,  $H^0(\tilde{X}, \Lambda^{n-1}\Omega_{\tilde{X}}) \neq 0$  и многообразие  $\tilde{X}$  не является  $CH_0$ -универсально тривиальным.

*Доказательство.* Свойства (i) и (ii) следуют из упражнений [7] V.5.7 и 5.11. Предположим,  $P = (b, a_1, \dots, a_n)$  – критическая точка  $f$ . При помощи линейной замены переменных  $y = c, x_i = a_i$ , где  $c^p = f(P)$  (поле  $k$  алгебраически замкнуто) можно предположить, что  $P = (0, \dots, 0)$ . Тогда можно разложить  $f$  в сумму линейной части, квадратичной части и части высших степеней:  $f = f_1(x_1, \dots, x_n) + f_2(x_1, \dots, x_n) + f_3(x_1, \dots, x_n)$ . Так как  $P$  – критическая точка, то  $f_1 = 0$ . Так как поле  $k$  алгебраически замкнуто, то каждая квадратичная форма над  $k$  может быть представлена в диагональной форме либо суммой квадратов (если характеристика поля не равна 2), либо суммой  $\sum x_i y_i$  (регулярная часть) и суммой квадратов. Таким образом, несложно проверить, что условие, что  $P$  невырожденная (соотв. почти невырожденная) точка, соответствует разложению в леммах 3.3, 3.5, 3.6 (соотв. 3.4), что выполняется для общего выбора коэффициентов  $f$  (см. упражнение [7] V. (5.6.6.3)).

Для доказательства (iii), как и в работе Тотаро [9], мы используем [7] V.5.11 для  $\mathbb{P}_k^n$ ,  $n \geq 3$  и  $L^p = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(mp)$ . Получаем :

1.  $K_{\mathbb{P}^n} \otimes L^p = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(mp - n - 1)$ ,
2. При условии  $mp \geq 4$  отображение  $H^0(\mathbb{P}^n, L^p) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}/m_x^4 \otimes L^p$  сюръективно для любой замкнутой точки  $x \in X$ .

Как следует из [7] V.5.7 (см. также [7] V.5.11, [8] Теорема 4.4), для общего выбора  $f \in H^0(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(mp))$  (в частности, удовлетворяющего (i) и (ii)), если  $q : X \rightarrow \mathbb{P}_k^n$  – циклическое накрытие  $\mathbb{P}_k^n$  степени  $p$ , разветвлённое над гиперповерхностью  $f = 0$  и  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  – разрешение особенностей  $X$ , полученное последовательным раздутием сингулярных точек, то  $\pi^* q^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(mp - n - 1)$  является подпучком  $\Lambda^{n-1}\Omega_{\tilde{X}}$ , в частности, если  $mp - n - 1 \geq 0$ , то  $H^0(\tilde{X}, \Lambda^{n-1}\Omega_{\tilde{X}}) \neq 0$ .

Как доказано в работе Тотаро [9] (Лемма 2.2), если  $\tilde{X}$  является  $CH_0$ -универсально тривиальным, то  $H^0(\tilde{X}, \Lambda^{n-1}\Omega_{\tilde{X}}) = 0$ . Из лемм 3.3, 3.4, 3.5,

3.6 следует, что все слои морфизма  $\tilde{X} \rightarrow X$  являются  $CH_0$ -универсально тривиальными, значит, и морфизм  $\tilde{X} \rightarrow X$  также  $CH_0$ -универсально тривиальный (см. [4] 1.8)  $\square$

*Замечание.* Если  $n + 1 > tr - t$  и многообразие  $X$  нормально (что верно, в частности, если  $f$  имеет только изолированные критические точки), то  $X$  является многообразием Фано : пучок  $-K_X$  обилен (см. [8] 4.14).

## 4 Накрытия, которые не являются стабильно рациональными

**Теорема 4.1.** *Пусть  $p$  – простое число. Пусть  $X$  – циклическое накрытие  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ ,  $n \geq 3$  степени  $p$ , разветвлённое над очень общей гиперповерхностью  $f(x_0, \dots, x_n) = 0$  степени  $tr$ . Предположим, что  $t(p - 1) < n + 1 \leq tr$ . Тогда  $X$  – многообразие Фано, которое не является стабильно рациональным многообразием. Существует не стабильно рациональное накрытие степени  $p$ , разветвлённое над гиперповерхностью степени  $tr$ , определённое над числовым полем.*

*Доказательство.* Пусть  $Y : y^p = f(x_0, \dots, x_n)$  – накрытие, удовлетворяющее условиям теоремы 3.7. Можно выбрать  $Y$  таким образом, что коэффициенты многочлена  $f$  определены над некоторым конечным полем  $\mathbb{F}_q$  характеристики  $p$ ; так как в теореме 3.7 условие  $f = 0$  задаёт очень общую гиперповерхность, то можно также предположить, что гиперповерхность  $f = 0$  является гладкой над  $\mathbb{F}_q$ . Таким образом, существует многочлен  $H$  степени  $tr$  с коэффициентами в некотором числовом поле, такой, что  $f$  является редукцией многочлена  $H$  по модулю  $p$ , и что накрытие  $X : y^p = H(x_0, \dots, x_n)$  является гладким многообразием. Так как  $X$  вырождается в  $Y$  и разрешение особенностей  $Y' \rightarrow Y$ , построенное в леммах 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 и теореме 3.7 является  $CH_0$ -универсально тривиальным, то  $X_{\mathbb{C}}$  не является  $CH_0$ -универсально тривиальным многообразием по теореме 3.7 и [4] 1.14(iii). Следовательно,  $X$  не является стабильно рациональным. Более того, по построению мы получаем пример над числовым полем. Так как коэффициенты многочленов степени  $tr$  с комплексными коэффициентами параметризуются неприводимым многообразием, то по [4] 2.3 для очень общего выбора такого многочлена, соответствующее накрытие  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  степени  $p$  не является  $CH_0$ -универсально

тривиальным.

□

*Замечание.* Таким образом, мы получаем, что циклическое накрытие  $X$  проективного пространства  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  степени  $p$ , разветвлённое над очень общей гиперповерхностью  $f(x_0, \dots, x_n) = 0$  степени  $mp$  не является  $CH_0$ -универсально тривиальным. Аналогично работе [4], из этого следует, что  $X$  не является рациональным ретрактом. Напомним, что стабильно рациональное многообразие является рациональным ретрактом, однако до сих пор неизвестно, различны ли эти понятия.

### Примеры.

1. При  $p = 2, n = 3$  и  $mp = 6$  получаем другое доказательство результата А. Бовиля [3].
2. При  $n = 3, m = p = 2$  получаем двойные накрытия  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ , разветвлённые над кватрикой (более общие результаты получены в работе Клэр Вуазан [10]).
3. При  $p = 2, n = 4$  и  $mp = 6, 8$  получаем, что двойное накрытие  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^4$ , разветвлённое над очень общей гиперповерхностью степени 6 или 8 не является стабильно рациональным.
4. При  $p = 2, n = 5$  получаем примеры для  $2m = 8, 10$ .
5. При  $p = 3, n = 4$  и  $mp = 6$  получаем пример многообразия Фано размерности 4, которое не является стабильно рациональным : накрытие степени 3, разветвлённое над очень общей поверхностью степени 6.
6. Результаты о двойных накрытиях  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ ,  $n = 4, 5$ , разветвлённых над кватрикой (А. Бовиль [2]), не покрываются результатами теоремы 4.1.



## Список литературы

- [1] A. Beauville, J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, Sir Peter Swinnerton-Dyer, *Variétés stablement rationnelles non rationnelles*. Ann. of Math, **121** (1985) 283–318.
- [2] A. Beauville, *A very general quartic double fourfold or fivefold is not stably rational*, arXiv:1411.3122, готовится к публикации в J. Algebraic Geometry.
- [3] A. Beauville, *A very general sextic double solid is not stably rational*, arXiv:1411.7484.
- [4] J.-L. Colliot-Thélène, A. Pirutka, *Hypersurfaces quartiques de dimension 3 : non rationalité stable*, готовится к публикации в Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure.
- [5] B. Hassett, A. Kresch, Y. Tschinkel, *Stable rationality and conic bundles*, <http://arxiv.org/abs/1503.08497>.
- [6] J. Kollár, *Nonrational hypersurfaces*. J. Amer. Math. Soc. 8 (1995), no. 1, 241–249.
- [7] J. Kollár, *Rational curves on algebraic varieties*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [8] J. Kollár, K. Smith, A. Corti, *Rational and nearly rational varieties*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **92**, 2004.
- [9] B. Totaro, *Hypersurfaces that are not stably rational*, arXiv:1502.04040, готовится к публикации в J. Amer. Math. Soc.
- [10] C. Voisin, *Unirational threefolds with no universal codimension 2 cycles*, arXiv:1312.2122 décembre 2013, готовится к публикации в Invent. math.